

Міністерство освіти і науки України  
Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

**ЛАЗАРЕНКО Сергій Вікторович**



УДК 519.7

**МЕТОДИ АНАЛІЗУ НЕЛІНІЙНИХ ДИСКРЕТНИХ  
СИСТЕМ ІЗ АНТИСИПАЦІЄЮ**

01.05.04. – системний аналіз і теорія оптимальних рішень

**АВТОРЕФЕРАТ**

дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата фізико–математичних наук

КИЇВ – 2019

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Навчально-науковому комплексі «Інститут прикладного системного аналізу» Національного технічного університету України «Київський Політехнічний Інститут імені Ігоря Сікорського»

**Науковий керівник:**

доктор фізико-математичних наук, професор,  
**Макаренко Олександр Сергійович**,  
Навчально-науковий комплекс «Інститут прикладного системного аналізу» Національного технічного університету України «Київський Політехнічний Інститут імені Ігоря Сікорського»,  
зав. відділу прикладного нелінійного аналізу

**Офіційні опоненти:**

доктор фізико-математичних наук, професор  
**Івохін Євген Вікторович**,  
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, професор кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень факультету комп'ютерних наук та кібернетики;

доктор фізико-математичних наук, професор  
**Працьовитий Микола Вікторович**,  
Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова,  
декан фізико-математичного факультету.

Захист відбудеться «10» грудня 2019 р. о 16 годині 30 хвилин на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.002.03 при Національному технічному університеті України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» за адресою: 03056, м. Київ, проспект Перемоги, 37, корпус №35, аудиторія №001.

З дисертацією можна ознайомитись у Науково-технічній бібліотеці імені Г.І. Денисенка Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» за адресою: 03056, м. Київ, проспект Перемоги, 37.

Автореферат розісланий «8» листопада 2019 р.

Учений секретар  
спеціалізованої вченої ради,  
д.ф.-м.н., професор



В.О. Капустян

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** Бурхливий розвиток технічних засобів, технологій та відповідного математичного інструментарію останні десятиліття дає підстави для розв'язання задач, пов'язаних із дослідженням складних процесів та явищ, протікання яких залежить не лише від передісторії, а й від майбутнього. Всі вони у значній мірі пов'язані із невизначеністю, а відтак, передбачають множинність майбутніх сценаріїв розвитку. Ще до недавніх пір вони здавалися надскладним для вирішення із-за ряду об'єктивних причин: для них не було апарату досліджень; часто самі постановки формалізованих задач були некоректними; відсутність технічних засобів, котрі моделювали б процеси із множинними альтернативними сценаріями розвитку, що представляє собою дуже ресурсомістку задачу. До них можна віднести: моделювання поведінки людей (вирішення конфліктних ситуацій), прогнозування суспільно-економічних та біологічних процесів, моделювання транспортного потоку тощо. Розробка інструментарію для аналізу та прогнозування цих процесів є одним із сучасних напрямків системних досліджень в інформатиці та кібернетиці.

Не зважаючи на те, що робіт в області дослідження систем із випередженням дуже мало, згадки про них зустрічаються досить давно – ще в працях Л.Е. Ельсгольца та С.Б. Норкіна. Новітні результати досліджень рівнянь із випередженням та чисельним алгоритмам їх розв'язань належать М.В. Азбелеву, Л.А. Бекларян, Д.А. Короткому, В.Г. Піменову, J. Yan.

На сьогоднішній день в класі систем із випередженням значне місце займає група так званих антисипаційних систем (СА чи АС). Її основи були закладені в працях R. Rosen, P. Davidsson та ін. Стани цих систем залежать від зпрогнозованих майбутніх станів (модельних). Їх ще називають системами із слабкою антисипацією. На відміну від них, було введено поняття сильної антисипаційної системи, в якій модель співпадає із самою системою. Основні здобутки в їх дослідженні належать як зарубіжним авторам D.M. Dubois, M.E. Burke, G. Tsirigotis, D. Bandekas, D. Pogaridis, J.L. Lázaro, L. Leydesdorff, A. Doniec, R. Mandiau, S. Piechowiak, S. Espie, так і вітчизняним – О.С. Макаренко, Д. Крушинський. Порівняно із закордонними роботами, у вітчизняних цей напрям досліджень АС ще не набув такого поширення.

Зважаючи на той факт, що системи із випередженням передбачають багатозначність у своїй формалізації, їх дослідження йде паралельно із теорією багатозначних відображень, класичні здобутки якої належать Ю.Г. Борисовичу, Б.Д. Гельдману, Б.М. Пшеничному та ін. Незважаючи на той факт, що рівняння із антисипацією є підкласом диференціальних включень та функціонально-диференціальних рівнянь, для яких розроблено потужний теоретичний інструментарій, включаючи результати по узагальненню теорії глобальних та траєкторних атракторів при багатозначності розв'язків, існуванню цих розв'язків та дослідженню стійкості тощо (В.С. Мельник, О.В.

Капустян, П.О. Касьянов, В.В. Пічкур та ін.) – все ще залишається відкритим ряд прикладних задач побудови інструментарію дослідження динаміки таких систем, зокрема – при переході між різними режимами із оцінками та мінімізацією відповідних обчислювальних витрат.

Із виникненням таких систем, постає потреба в розвитку апарату для їх системного аналізу, а важливість цього класу систем та його недостатня вивченість й обумовлюють актуальність теми дослідження. Окрім невеликої кількості робіт, присвячених як теоретичним, так і прикладним здобуткам в теорії антисипації, ще й не існує системного підходу в їх дослідженні та відсутнє належне математичне та програмне забезпечення для їх системного аналізу. До того ж, їх симуляція представляє собою надресурсномістку проблему, а від того, гостро постає задача оптимізації цих алгоритмів. Беручи до уваги все вище зазначене, дану роботу присвячено розвиненню математичних методів та розробці програмних засобів для дослідження систем із сильною антисипацією на ряду із обчислювальною оптимізацією запропонованих алгоритмів.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертація виконана у відділі прикладного нелінійного аналізу Інституту прикладного системного аналізу Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» в рамках таких наукових тем: «Системи, моделі та рівняння з випередженням та запізненням. Дослідження математичних задач та застосувань» – номер державної реєстрації 0114U000205; «Дослідження складних режимів багатозначних відображень в моделях з випередженням та недостатньою інформацією» – номер державної реєстрації 0109U000297.

**Мета і задачі дослідження.** *Метою* дисертації є розвинення математичних та розробка програмних засобів аналізу дискретно-часових нелінійних систем із антисипацією із скороченням обчислювальних витрат. Для досягнення поставленої мети розв'язуються наступні задачі:

- дослідити простір параметрів нелінійної дискретної системи із антисипацією;
- дослідити граничні множини нелінійної дискретної системи із антисипацією на предмет фрактальних властивостей (самоподібності, Хаусдорфової розмірності);
- встановити обчислювальні складності моделювання систем із антисипацією;
- узагальнити методи побудови карт динамічних режимів, старшого показника Ляпунова для застосування їх у дослідженні антисипативних систем;
- розробити програмне забезпечення для застосування та візуалізації узагальнених методів.

*Об'єктом дослідження* є нелінійні, дискретно-часові, антисипативні процеси різної природи.

*Предметом дослідження є моделі і методи аналізу нелінійних дискретно-часових систем із антисипацією, і програмні засоби їх реалізації.*

*Методи дослідження.* Для дослідження фрактальних властивостей атракторів динамічних систем із антисипацією (ДСА) та отримання оціночних співвідношень для їх розмірності Хаусдорфа зверху використано методи теорій символічної динаміки, фрактального аналізу та ітерованих функцій. Узагальнення класичних методах аналізу динамічних систем (ДС) на клас систем із антисипацією, здійснювалось із використанням теорії багатозначних операторів у Хаусдорфовому просторі. Оптимізація розвинених методів здійснювалась за допомогою засобів теорії складності обчислень. Обчислювальні розрахунки проводилися на розподілених кластерних системах, а візуалізація атракторів ДСА реалізовувалася методом комп'ютерного моделювання.

**Наукова новизна одержаних результатів полягає в наступному:**

*вперше* для антисипаційних систем, що зводяться до співвідношення майбутніх станів від минулих через оператор Хатчинсона:

- для оціночного співвідношення Хаусдорфовой розмірності їх атракторів зверху, коли селектори оператора Хатчинсона перетинаються у частинному випадку:
  - сформульовано необхідну умову існування розв'язку;
  - показано єдиність розв'язку;
- отримані часові та просторові обчислювальні складності моделювання; *отримали подальший розвиток:*
  - за допомогою символічної динаміки отримано оціночні співвідношення Хаусдорфовой розмірності зверху для атракторів ДСА у випадку, коли селектори оператора Хатчинсона не перетинаються та із самоперетинами частинного випадку;
  - метод побудови карт динамічних режимів: узагальнено на динамічні системи із багатозначним оператором еволюції; поняття циклу представлено в Хаусдорфовому метричному просторі; скорочено часові обчислювальні витрати за рахунок представлення станів ДСА мультимножинами та пошуку циклу серіями ітерувань;
  - метод побудови карти старшого показника Ляпунова: узагальнено на динамічні системи із багатозначним оператором еволюції в Хаусдорфовому метричному просторі; скорочено часові обчислювальні витрати за рахунок представлення станів ДСА мультимножинами;

**Наукове та практичне значення отриманих результатів.** Проведені дослідження відносяться до теоретичних та прикладних проблем системного аналізу дискретно-часових нелінійних систем із антисипацією. Результати досліджень можна застосовувати в системному аналізі моделей процесів та явищ, формалізація яких передбачає наявність випереджаючої складової. До них можна віднести моделі співіснування видів, моделі конфліктних ситуацій боротьби за обмежені ресурси та нові моделі нейронних мереж, клітинних автоматів та штучних імунних систем із випередженням.

Основні теоретичні та обчислювальні результати впроваджено у навчальний процес ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ імені Ігоря Сікорського».

**Особистий внесок здобувача.** Всі результати, одержані в дисертації, та зокрема ті, що виносяться на захист, отримані автором самостійно. Особистий внесок у роботах, виконаних у співавторстві: [1; 3-6] здобувачу належать всі основні результати робіт, співавтору О.С. Макаренку – постановка задач та керівництво роботою.

**Апробація результатів дисертації.** Основні результати роботи були представлені на наступних конференціях та семінарах: International Conference on Computing Anticipatory Systems: CASYS'11 (Belgium, August 8–13, 2011); 12<sup>th</sup> Conference Mathematics in Technical and Natural Sciences, (Krynica, Poland, September 4–10, 2011); 2<sup>nd</sup> International conference on Nonlinear analysis and applications / on memory of V.S. Melnik (Kiev, April 4–6, 2012); Міжнародна конференція «Динамічні системи та їх застосування» (Київ, 16–18 травня, 2012); Международная научно-методическая конференция «Информационно-вычислительные технологии и моделирование в решении задач строительства, техники, управления и образования», ПГУАС (г. Пенза, Россия, 9–14 декабря 2013); Аналіз, моделювання, управління. Вип. 1. Збірник наукових праць відділу прикладного системного аналізу НТУУ «КПІ» (Київ, 2013); Сьома міжнародна науково-практична конференція «Математика в сучасному технічному університеті» (Київ, 27–28 грудня 2018).

Результати роботи неодноразово докладалися на наукових семінарах відділу прикладного нелінійного аналізу ННК «ІПСА».

**Публікації.** За матеріалами дисертаційної роботи опубліковано 13 наукових праць, у тому числі 5 статей у наукових фахових виданнях України (одна з них включена до науково-метричної бази РІНЦ), 1 стаття у фаховому зарубіжному виданні, включеному до міжнародної науково-метричної бази SCOPUS, 7 тез доповідей в збірниках матеріалів конференцій.

**Структура та обсяг роботи.** Робота складається із вступу, переліку умовних позначень, чотирьох розділів основної частини, висновків та списку використаних джерел і двох додатків – із списком публікацій автора за темою дисертаційної роботи та довідка про впровадження результатів у навчальний процес. Повний обсяг роботи – 144 сторінок із 18 рисунками, обсяг основного тексту складає 111 сторінок. Бібліографія містить 129 посилань на літературні джерела.

## **ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ**

У **вступі** розкрита основна суть наукової проблеми за темою дисертації; обґрунтовано актуальність теми; вказано: об'єкт, предмет та методи дослідження; сформульовано: мету дослідження та основні задачі для її досягнення; представлено: новизну, практичне значення одержаних результатів та особистий внесок здобувача; зазначено відомості про апробацію результатів, список публікацій за темою роботи; наведено структуру та обсяг роботи.

У першому розділі здійснено огляд літератури та проблеми дослідження систем із антисипацією, наведено основні елементи теорії хаосу та головні поняття теорії антисипаційних систем, їх класифікація. Викладено зв'язок дискретних антисипативних систем із різницевиими включеннями та функціонально-диференціальними рівняннями із випереджаючим аргументом. Наведено приклади реального застосування таких систем. Приводиться зведення антисипативних систем, як систем із випередженням до систем із запізненням через багатозначні оператори еволюції в загальному випадку. На прикладі логістичного рівняння наводиться нова модель із антисипацією та проводиться загальний її аналіз в просторі управляючих параметрів.

Розглядатимемо початкову систему, що описується законом сильної антисипації першого порядку

$$x_i = f(x_{i-1}, x_i, \Lambda), x_i \in R^n, i = 1, 2, \dots \quad (1)$$

де параметр системи  $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\dim(\Lambda)})$ ,  $\lambda_j \in R^n, j = \overline{1, \dim(\Lambda)}$ , оператор зв'язку  $f: R^n \times R^n \times R^{n \dim(\Lambda)} \rightarrow R^n$ ,  $x_i$  – стани системи, заданої неявною залежністю майбутнього від теперішнього та власного майбутнього. Нехай оператор  $f$  з (1) передбачає багатозначність розв'язків і його можна представити багатозначним відображенням  $F: S^n \times R^{n \dim(\Lambda)} \rightarrow S^n$  із набором селекторів  $\{f_k\}_k$  у вигляді

$$X_i = F(X_{i-1}, \Lambda) = \bigcup_{x \in X_{i-1}} \bigcup_k f_k(x, \Lambda), i = 1, 2, \dots, \forall k \quad (2)$$

тут  $X_i \in S^n, x \in R^n, S^n \subset 2^{R^n}$  (підмножина множини всіх можливих підмножин із  $R^n$ ), а  $f_k$  – однозначна гілка (переріз, селектор)  $F$ .

**Означення.** Станами ДС заданої рівнянням (2) в дискретні моменти  $i = 0, 1, \dots$ , будемо називати такі множини  $X_i = \bigcup_k \{x_k^i\} \in S^n$ . А оператор  $F$ , при такому представленні нашої ДСА через явну залежність поточного її стану від попередніх (по часу), називатимемо оператором еволюції ДСА.

**Означення.** Траєкторію ДС, заданої правилом зміни станів (2) під дією оператора  $F(\cdot, \cdot)$ , починаючи із стану в момент  $i$ , називатимемо послідовність станів  $X_i, X_{i+1}, X_{i+2}, \dots, X_{i+k}$ . Якщо  $k$  – скінченне, то мова, відповідно, йтиме про скінченну частину траєкторії.

**Означення.** Під циклічною траєкторією (циклом або періодичною орбітою) періоду  $p$  антисипаційної ДС розумітимемо набір послідовних точок  $X_i, X_{i+1}, \dots, X_{i+p-1}$  отриманих з (2) і таких, що  $p$  – найменше додатне, при якому  $X_i = F^p(X_i, \Lambda) \stackrel{\text{def}}{=} X_{i+p}$ .

**Означення.** Збуреним станом ДС із антисипацією стану  $X_i \in S^n$  називатимемо такий стан  $X'_i \in S^n$ , що  $d_H(X_i, X'_i) = \|\tilde{x}_i\|$ , де  $\tilde{x}_i \in R^n$  – збурення  $X_i$ ,  $d_H(\cdot, \cdot)$  – метрика Хаусдорфа.

Для АС, що зводяться до представлення (2) із двома селекторами, доведено:

**Теорема.** Для того, аби такого виду АС породжувала самоподібну структуру своїм аттрактором достатньо, щоб басейни обох нерухомих точок співпадали.

Тут під *басейном* розуміємо множину всіх таких траєкторій ДС, котрі притягаються відповідним атрактором. Тематика фрактальних властивостей граничних множин АС із багатозначними операторами еволюції продовжується в наступному розділі. Наприкінці сформульовано загальну постановку задачі дисертаційної роботи.

У другому розділі проводиться аналіз динамічних систем із багатозначним оператором еволюції (2) з точки зору фрактальних властивостей їх граничних множин. Наведено необхідні елементи теорії символічної динаміки та систем ітерованих функцій (СІФ) за допомогою яких отримано основні результати цього розділу. Приводиться обґрунтування використання СІФ із самоперетинами для дослідження АС.

Розглянемо скінченну систему функцій

$$F = \{f_1, f_2, \dots, f_N\}, f_i: I \rightarrow I, I \subseteq R^n, i = \overline{1, N}, \quad (3)$$

визначених в повному метричному просторі  $(I, d_H)$  із метрикою  $d_H(\cdot, \cdot)$  Хаусдорфа на всіх компактних підмножинах з  $I$ . Нехай кожне відображення  $f_i \in \lambda_i$ -стисненням, тобто  $\lambda_i(I) < 1$ ,  $\lambda(I) = \max_{i \in \overline{1, N}} \{\lambda_i(I)\}$ , або просто  $\lambda$ . Розглядаємо оператор в (2) як оператор Хатчинсона  $H: \text{Comp}(I) \rightarrow \text{Comp}(I)$ , що діє в метричному просторі на множині всіх непустих компактних підмножин із  $I$ :  $H(K) = \bigcup_{x \in K} \bigcup_{i=1}^N f_i(x)$ ,  $K \in \text{Comp}(I)$ . Як добре відомо, такий оператор в метриці Хаусдорфа має єдину нерухому точку  $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} H^k(K) \Rightarrow A = H(A)$  в  $\text{Comp}(I)$ . Якщо для набору функцій  $F$  виконується умова  $f_i(X) \cap f_j(X) = \emptyset$  для  $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, N\}, i \neq j$ , на деякій множині  $X$ , то кажуть, що  $F$  задовольняє умові *відкритих множин (OSC)* на  $X$ . При невиконанні умови OSC, коли області значень операторів із СІФ перетинаються, формула Морана в загальному випадку не виконується. СІФ, що не задовольняють OSC, називають СІФ із самоперетинами.

Розглядаємо скінченний алфавіт  $\Sigma = \{1, 2, \dots, N\}$  символічної динаміки із СІФ  $F$ . Послідовність застосування операторів із  $F$  кодують послідовністю їх номерів  $\mathbf{i} = i_1 i_2 \dots i_p$ ,  $i_j \in \Sigma$ , для  $j = \overline{1, p}$ , та записують  $\mathbf{i} \in \Sigma^p$ . У символічній динаміці  $\mathbf{i}$  називають *словом* довжини  $|\mathbf{i}| = p$  в алфавіті  $\Sigma$ . Ця послідовність визначає порядок композиції  $f_{\mathbf{i}}(\cdot) = f_{i_1 i_2 \dots i_p}(\cdot) = f_{i_1} \circ f_{i_2} \circ \dots \circ f_{i_p}(\cdot)$ . Через  $\Sigma^*$  позначатимемо множину всіх скінчених послідовностей номерів із  $\Sigma$ , тобто  $\Sigma^* = \bigcup_{p \geq 0} \Sigma^p$  при всіх скінчених  $p$ . Через  $\Sigma^\infty$  позначатимемо множину всіх нескінчених послідовностей номерів із  $\Sigma$ . На  $\Sigma^\infty$  визначають *адресне відображення*  $\pi: \Sigma^\infty \rightarrow A$ . В подальших викладках для цього відображення використовуємо відому теорему, що займає для нього центральне місце:

**Теорема<sup>1</sup>.** Нехай  $\epsilon$  повний метричний простір  $(X, d(\cdot))$ , гіперболічна СІФ  $F = \{f_1, f_2, \dots, f_N\}$ ,  $f_i: X \rightarrow X$ ,  $i = \overline{1, N}$  із атрактором  $A$ . Тоді, границя  $\pi(\mathbf{i}) = \lim_{|\mathbf{i}| \rightarrow \infty} f_{\mathbf{i}}(x)$  існує, належить  $A$  та не залежить від вибору  $x \in X$ . Якщо  $K \in \text{Comp}(X)$ , то збіжність є рівномірною на  $\forall x \in K$ . Таким чином задана функція є неперервною.

<sup>1</sup> Barnsley, M.F.: Fractal Image Compression. Notices of American Mathematical Society, 43(6) (1996). С. 123



Тобто результат нескінченного ітерування довільної початкової точки  $x_0 \in X$  операторами буде залежати лише від послідовності індексів цих операторів і не залежати від  $x_0$ , а сам атрактор для  $F$  можна представити через множину адрес всіх його точок, тобто  $A = \bigcup_{i \in \Sigma^\infty} \pi(i) \Leftrightarrow A = \lim_{p \rightarrow \infty} \bigcup_{i \in \Sigma^p} f_i(x)$  для  $\forall x \in I$ . Через  $A_p = \bigcup_{x \in I} A_p(x)$ ,  $A_p(x) = \bigcup_{i \in \Sigma^p} f_i(x)$  позначатимемо  $p$ -те наближення інваріантної множини  $A$ . Для зручності подальших викладок перепишемо  $A_p$  наступним чином, увівши позначення  $\bigcup_{x \in I} f_i(x) = A_i$

$$A_p = \bigcup_{x \in I} A_p(x) = \bigcup_{x \in I} \bigcup_{i \in \Sigma^p} f_i(x) = \bigcup_{i \in \Sigma^p} \bigcup_{x \in I} f_i(x) = \bigcup_{i \in \Sigma^p} A_i \quad (4)$$

Звернемо увагу на те, що множина  $\{A_i\}$  покриває наш атрактор  $A$ .

На практиці умова OSC виконується рідко, оскільки вона є досить жорсткою. Слабшою за OSC в теорії символічної динаміки є умова слабкої роздільності WSC (weak separation condition).

**Означення.** Кажуть, що СІФ задовольняє WSC, якщо існують такі  $x_0 \in I$  та  $c > 0$ , що для будь-якого номера  $k$ , елемента  $x \in I$  та скінченної послідовності  $j$  із  $\Sigma^*$ , кількості таких  $f_i, i \in \Lambda_k$ , що  $f_i \circ f_j(x_0) \in B_{\lambda^k}(x)$ , не перевищує  $c$ , де  $B_{\lambda^k}(x)$  – окіл  $x$  радіуса  $\lambda^k$ .

Цернером<sup>2</sup> було показано, що система ітерованих функцій, для якої виконується умова WSC має атрактор додатної Хаусдорфової міри. Що є досить важливим результатом в теорії СІФ, оскільки зліченні СІФ, для яких не виконується умова OSC, можуть таки мати додатну міру Хаусдорфа, і як наслідок – деяку розмірність Хаусдорфа, якщо для цієї СІФ буде виконуватись WSC.

**Підрозділ 2.3** присвячено оцінці розмірності Хаусдорфа для атрактора ДСА без самоперетинів, використовуючи апарат символічної динаміки. На практиці аналітичний розрахунок розмірностей Хаусдорфа є дуже складною задачею. Часто її розв'язують оцінюючи розмірність Хаусдорфа.

На прикладі викладок із 2.3 у **підрозділі 2.4** розглянуто складніший випадок – система (3) із самоперетинами (клас  $\mathcal{N}$ ). Для якої, в загальному випадку, СІФ не є системою із самоперетинами скінченного типу околів, а тому метод запропонований Ngai-Wang<sup>3</sup> не працюватиме. Клас  $\mathcal{H}$  визначається як:

1) Набір операторів  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$  з системи  $F$  можна розбити на два набори таким чином, що в середині кожного з них оператори не перетинаються на області визначення (тобто для кожного з наборів виконується умова OSC);

2) кожному оператору із  $\Sigma_1$  ставиться у відповідність такий оператор з  $\Sigma_2$ , що обидва перетинаються;

3) Для кожної такої пари  $i \in \Sigma_1$  та  $j \in \Sigma_2$  з умови 2 існують такий номер  $n_{ij} \in \Sigma_2$  та скінченне слово  $j_{ij} \in \Sigma_2^*$ , що  $f_i(\cdot) \cap f_j(\cdot) \subseteq f_i \circ f_{n_{ij}}(\cdot)$  та  $f_i \circ f_{n_{ij}} = f_j \circ f_{j_{ij}}$ ;

<sup>2</sup> Zerner, M.: Weak separation properties of self-similar sets. Proc. Amer. Math Soc. 124, 3529-3539 (1996)

<sup>3</sup> Ngai, Sze-man, Wang, Yang: Hausdorff dimension of self-similar sets with overlaps. J. London Math. Soc. 63(3), 655-672 (2001)

З цих умов лише третя є досить жорсткою, через це клас СІФ  $\mathcal{H}$  стає досить вузьким та специфічним. Для подальшої зручності введено такі позначення:  $B_i = \{j \in \Sigma_2 \mid f_i(\cdot) \cap f_j(\cdot) \neq \emptyset\}$ ,  $C_i = \{n_{ij} \in \Sigma_2 \mid j \in B_i\}$ ,  $D_i = \Sigma_2 \setminus C_i$ . У роботах *QiRong Deng*, *John Harding* та *TianYou Hu*<sup>4</sup> показано кілька важливих результатів для  $\mathcal{H}$ , котрі використано далі у розділі:

- 1) можна виділити такий набір операторів  $F_3 = \{f_{ij} \mid i \in \Sigma_1^*, i \in \Sigma_1, j \in D_i\}$ , котрий разом із операторами алфавіту  $\Sigma_2$  задовольняє умові OSC;
- 2) така СІФ задовольняє умові WSC, а тому існує деяка Хаусдорфова розмірність такого атрактора;
- 3) кожна точка  $A$  належить атрактору оператора Хатчинсона з об'єднання функцій із  $\Sigma_2$  та  $F_3$ .

Наводяться наступні формули для розрахунку розмірності Хаусдорфа. Якщо  $D_i = \emptyset$  для всіх  $i \in \Sigma_1$ , то

$$\sum_{j \in \Sigma_2} \lambda_j^S = 1, \quad (5)$$

інакше

$$\sum_{i \in \Sigma} \lambda_i^S - \sum_{i \in \Sigma_1} \lambda_i^S \sum_{j \in C_i} \lambda_j^S = 1 \quad (6)$$

Випадок (5), як можна побачити, виникає тоді, коли атрактор, утворений виключно операторами з  $\Sigma_1$ , повністю лежить в аттракторі, утвореному операторами з  $\Sigma_2$ , тобто розрахунок Хаусдорфової  $d$ -міри здійснюється лише по операторах з  $\Sigma_2$ .

Позначимо через  $\Sigma_3$  деякий алфавіт, всі такі унікальні слова  $\mathbf{w} = iij$  з  $F_3$ . Далі, використовуючи апарат символічної динаміки, показано, що оцінка зверху розмірності Хаусдорфа атрактора  $A$  для СІФ (2) із нелінійними операторами та при умовах 1-3 може бути отримана формулами (5) та (6). Схема доведення наступна. Взявши до уваги третій результат для  $\mathcal{H}$ ,  $p$ -те наближення інваріантної множини  $A$  (4) системи (3) в цьому випадку можемо записати як  $A_p = \bigcup_{\mathbf{m} \in \Sigma_2^p \cup \Sigma_3^p} A_{\mathbf{m}} = \bigcup_{i \in \Sigma_2^p} A_i \cup \bigcup_{\mathbf{w} \in \Sigma_3^p} A_{\mathbf{w}}$ . А тому  $i$ -міра  $H^d(A_p) = H^d\left(\bigcup_{i \in \Sigma_2^p} A_i\right) + H^d\left(\bigcup_{\mathbf{w} \in \Sigma_3^p} A_{\mathbf{w}}\right)$ . Тут всі слова  $\mathbf{w}$  згідно першого результату для  $\mathcal{H}$  представимо як  $\mathbf{w} = iij$ . Розписуючи оцінку цієї  $d$ -міри зверху  $\bar{H}^d(A_p)$ , слідуючи означенню  $d$ -міри Хаусдорфа та опускаючи у ньому нормуючий коефіцієнт (для розрахунку розмірності важливо лише те, аби міра була скінченною та строго більшою за нуль), отримаємо оцінку першого доданку:

$$H^d\left(\bigcup_{i \in \Sigma_2^p} A_i\right) \leq \sum_{i \in \Sigma_2^p} \text{diam}(A_i)^d \leq \text{diam}(A)^d \left(\sum_{i \in \Sigma_2} \lambda_i(I)^d\right)^p \quad (7)$$

Притримуємося тієї ж послідовності міркувань – другий доданок  $H^d(A_p)$  не перевищує  $\sum_{\mathbf{w}_1 \dots \mathbf{w}_p \in \Sigma_3^p} \left(\prod_{k=1}^p l_{\mathbf{w}_k}(J_k) \cdot \text{diam}(A)\right)^d$ , де  $J_p \equiv I$ ,  $J_{p-k} = f_{\mathbf{w}_{p-k+1}}(J_{p-k+1})$ , для  $k = \overline{1, p-1}$ . Маємо  $J_1 \subseteq J_2 \subseteq \dots \subseteq J_p$  в силу стиснень композиції  $f_{\mathbf{w}}$ . Коефіцієнти стиснення  $l_{\mathbf{w}_k}(J_k) = \lambda_{i_k}(J_{k_0}) \lambda_{i_k}(J_{k_2}) \lambda_{j_k}(J_{k_1})$ , та

<sup>4</sup> Deng QiRong, Harding, J., Hu TianYou: Hausdorff dimension of self-similar sets with overlaps. J. Science in China Series A: Mathematics. January, 52(1), 119–128 (2009)

$J_{k_0} = J_k, J_{k-1} = f_{j_k}(J_{k_2})$ . Враховуючи  $\lambda_{i_j}(J_j) \leq \lambda_{i_j}(I)$  при  $\forall j$ , оцінимо значення  $l_{\mathbf{w}_k}$  зверху так  $l_{\mathbf{w}_k}(J_k) \leq \lambda_{i_k}(I) \lambda_{i_k}(I) \lambda_{j_k}(I)$  на всьому  $I$ . Тому

$$H^d \left( \bigcup_{\mathbf{w} \in \Sigma_3^p} A_{\mathbf{w}} \right) \leq \text{diam}(A)^d \cdot \sum_{i_1 i_1 j_1 \dots i_p i_p j_p \in \Sigma_3^p} \left( \prod_{k=1}^p \lambda_{i_k}(I) \lambda_{i_k}(I) \lambda_{j_k}(I) \right)^d.$$

Враховуючи  $\left( \sum_{i=1}^N a_i^d \right)^p = \sum_{i \in \Sigma^p} \left( a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdot \dots \cdot a_{i_p} \right)^d$ , де в ролі  $a_i$  виступають коефіцієнти стиснень, що відповідають словам  $\mathbf{w}_k$  довжини  $p$  на  $I$ , матимемо

$$H^d \left( \bigcup_{\mathbf{w} \in \Sigma_3^p} A_{\mathbf{w}} \right) \leq \text{diam}(A)^d \cdot \left( \sum_{i_k i_k j_k \in \Sigma_3} \lambda_{i_k}(I)^d \lambda_{i_k}(I)^d \lambda_{j_k}(I)^d \right)^p \quad (8)$$

Тут варто відзначити, що у суму правої частини входять всі можливі початкові частини  $i_k \in \Sigma_1^\infty$  та  $i_k \in \Sigma_1$  слова  $\mathbf{w}_k$  та деякі кінцеві сегменти  $j_k \in \Sigma_2$  (третя умова  $\mathcal{H}$ ). Тобто кожній парі  $(i_k, i_k)$  ставиться у відповідність деякий  $j_k$  з алфавіту  $D_i$ , котрий визначений попереднім символом  $i_k$ . Позначимо  $m = |i_k|$ . Спочатку групуємо доданки по всім можливим словам  $i_k$ , а тоді – по всім  $i_k$ . Таким чином, основу степені правої сторони останньої нерівності можемо записати так

$$\left( \sum_{l=|i|=0}^\infty \sum_{i_k \in \Sigma_1^l} \lambda_{i_k}(I)^d \right) \left( \sum_{\substack{i_k \in \Sigma_1 \\ j_k \in D_i}} \lambda_{i_k}(I)^d \lambda_{j_k}(I)^d \right) \quad (9)$$

Перший множник (9) буде  $1/(1 - \sum_{i \in \Sigma_1} \lambda_i(I)^d)$  при  $\sum_i \lambda_i^d \leq 1$ . Другий множник (9), групуючи по  $i$ , запишемо так

$$\sum_{\substack{i_k \in \Sigma_1 \\ j_k \in D_i}} \lambda_{i_k}(I)^d \lambda_{j_k}(I)^d = \sum_{i \in \Sigma_1} \lambda_i(I)^d \cdot \sum_{j \in D_i} \lambda_j(I)^d \quad (10)$$

Підставляючи (10) в (9), а (9) в (8), матимемо оцінку зверху для  $H^d \left( \bigcup_{\mathbf{w} \in \Sigma_3^p} A_{\mathbf{w}} \right)$ :  $\text{diam}(A)^d \cdot \left( \sum_{i \in \Sigma_1} \lambda_i(I)^d \cdot \sum_{j \in D_i} \lambda_j(I)^d / (1 - \sum_{i \in \Sigma_1} \lambda_i(I)^d) \right)^p$

Нарешті, склавши останнє із (7), отримаємо остаточну оцінку зверху  $\bar{H}^d(A_p)$ :

$$\text{diam}(A)^d \cdot \left( \sum_{i \in \Sigma_2} \lambda_i(I)^d + \sum_{i \in \Sigma_1} \lambda_i(I)^d \cdot \sum_{j \in D_i} \lambda_j(I)^d / (1 - \sum_{i \in \Sigma_1} \lambda_i(I)^d) \right)^p$$

Для того, щоб вона була скінченною  $0 < \bar{H}^d(A_p) < \infty$  при переході  $p \rightarrow \infty$

необхідно, аби виконувалась умова  $\sum_{i \in \Sigma_2} \lambda_i(I)^d + \frac{\sum_{i \in \Sigma_1} \lambda_i(I)^d \cdot \sum_{j \in D_i} \lambda_j(I)^d}{1 - \sum_{i \in \Sigma_1} \lambda_i(I)^d} = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{i \in \Sigma} \lambda_i(I)^d - \sum_{i \in \Sigma_1} \lambda_i(I)^d \cdot \sum_{j \in C_i} \lambda_j(I)^d = 1 \quad (11)$$

**Теорема.** *Співвідношення (11) має не більше одного розв'язку відносно  $d$ .*

Схема доведення базується на дослідженні функції  $\gamma(d) = \sum_{i \in \Sigma} \lambda_i(I)^d - \sum_{i \in \Sigma_1} \lambda_i(I)^d \cdot \sum_{j \in C_i} \lambda_j(I)^d$ . Вказано, що вона неперервна на  $[0; \infty)$  та строго спадає від  $\gamma(0) = |\Sigma| - \sum_{i=1}^{n_1} |C_i|$ . А тому, (11) матиме єдиний розв'язок лише при виконанні умови  $\sum_{i=1}^{n_1} |C_i| + 1 \leq |\Sigma|$ .

В результаті маємо оцінку розмірності  $\dim_H(A)$  зверху для атрактора СІФ із самоперетинами класу  $\mathcal{H}$ ,  $\dim_H(A) \leq d$ , де  $d$  – єдиний розв'язок (11). У випадку лінійності відображень  $f_i$  матимемо  $\lambda_i(I) \equiv \lambda_i$ . В цьому випадку співвідношення (11) співпадає із формулою, отриманою в роботах *QiRong Deng, John Harding* та *TianYou Hu*<sup>4</sup> з точністю до інтервалу  $I$  по якому проводиться розрахунок коефіцієнтів стиснення.

У третьому розділі наведено необхідні базові поняття теорій алгоритмів та складності обчислень. Детально описано узагальнення наступних методів на клас систем із антисипацією: побудови карт динамічних режимів та старшого показника Ляпунова. Їх узагальнення супроводжується скороченням часових обчислювальних витрат. Запропоновано та обґрунтовано доцільність представлення станів СА мультимножинами з точки зору мінімізації часових обчислювальних витрат. Детально досліджені складності адаптованих процедур пошуку періодів циклічних траєкторій. Розрахунок складностей обчислень виконується почергово. Спочатку введено складність побудови стану ДСА, далі – складність побудови траєкторії й нарешті – складність кожної із запропонованих процедур пошуку періоду.

Нехай маємо справу із траєкторією дискретної ДСА  $X_0, X_1, X_2, \dots$ . Оскільки ДСА часто можна представити у вигляді явної залежності майбутніх станів від минулих через оператор Хатчинсона, то кардинальні числа  $|X_i|$ , в найгіршому випадку (наприклад, без утворення циклів), будуть зростати по показниковому закону

$$|X_i| = |X_0| \cdot N^i, i = 0, 1, 2, \dots, \quad (12)$$

де  $N$  – кількість селекторів в операторі Хатчинсона (2). Через цю особливість ДСА, питання обчислювальних складностей постає особливо гостро. На їх основі зможемо скоректувати і покращити запропоновані алгоритми їх побудови з точки зору мінімізації обчислювальної складності.

Дотримуватимемося наступних позначень:

- під  $m_n$  розумітимемо обчислювальні затрати на розрахунок функції, що діє в  $R^n$ . Будемо вважати, що для відповідної функції наперед розрахована таблиця значень, і затрати на розрахунок цієї функції будуть зведені, до отримання значення із вище згаданої таблиці;

- $c_n$  – обчислювальні затрати на порівняння двох чисел в  $R^n$ ;

- $p$  – максимальна довжина циклу, який розглядаємо;

**Теорема.** *Обчислювальна складність побудови кожного стану  $X_i, i = 1, 2, \dots$  в найгіршому випадку буде  $O(N^{2i})$ .*

Показано, що ця складність рівна  $m(i) = \frac{c_n |X_0|^2}{2} N^{2i} + \left(m_n - \frac{c_n}{2}\right) \cdot |X_0| \cdot N^i$ . Звідси бачимо, що найбільші обчислювальні витрати припадають на операції порівняння, а на обчислення відповідних точок в  $R^n$  – лише  $O(N^i)$ . В цьому й полягає одна з найбільших проблем моделювання ДСА. Її можна частково обійти за рахунок представлення  $X_i$  мультимножинами (відсутні затрати на порівняння  $c_n = 0$ ), тоді в  $m(i)$  залишиться лише складова  $O(N^i)$ . Однак, в такому випадку, умова (12) буде мати місце завжди, незалежно від того, чи режим ДСА регулярний, чи ні. І як наслідок – постійний ріст використання пам'яті по показниковому закону  $N^i$ .

**Теорема.** *Обчислювальна складність  $d_{ij}$  розрахунку метрики Хаусдорфа  $d_H(X_i, X_j)$  буде*

$$d_{ij} \in O(N^{i+j}) \quad (13)$$

**Теорема.** Складність побудови траєкторії із  $X_i$  в  $X_{i+p}$   $M(i, i+p)$  буде  $O(N^{2i+2j})$ .

У випадку мультимножин ( $c_n = 0$ ):

$$M(i, i+p) \in O(N^{i+p}) \quad (14)$$

Далі розглядаємо адаптацію побудови карт динамічних режимів для ДСА. Спочатку обираємо точку  $\bar{\lambda}_0 = (\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_{\dim(\Lambda)}^0)$  простору параметрів системи та задаємо початковий стан  $X_0 = \{x_0^0\}$ . При першому запуску траєкторії точку  $x_0^0 \in R^n$  обирають близькою до смислового значення системи, для якої побудована відповідна антисипаційна модель. Далі її ітерують довільною композицією селекторів  $f_i(\cdot) = f_{i_0}(\cdot) \circ f_{i_1}(\cdot) \circ \dots \circ f_{i_k}(\cdot)$  оператора Хатчинсона  $H(\cdot)$ , аби вийти на точку як завгодно близьку до інваріантної множини. Покажемо це. З означення непорушної точки багатозначного оператора  $x^* \in H(x^*)$  та властивостей адресного відображення з попереднього розділу випливає, що для  $\forall x_0 \in R^n$  з басейну притягіння інваріантної множини оператора  $H$  її  $k$ -й образ ( $H^k(\cdot)$ ) можна представити, як об'єднання всіх таких злічених композицій  $f_i(\cdot)$  із довжинами слів  $k = |\mathbf{i}| \rightarrow \infty$ ) потрапить в аттрактор при  $k \rightarrow \infty$ . Таким чином, для кожної такої композиції  $f_i(\cdot)$  матимемо точку на аттракторі незалежно від  $x_0$ . В якості  $f_i(\cdot)$ , без втрати цілісності, обираємо композицію з номерів одного селектора ( $\mathbf{i} = i_0 i_1 \dots$ ). Цілком зрозуміло, що якщо відповідний

селектор має період  $p$ , то  $f_j(x^*) = x^*$ , де  $\mathbf{j} = \overbrace{i_0 i_1 \dots i_{p-1}}^p$ . Тому, в силу умови стискаючого  $H(\cdot)$  та приналежності  $x_0$  басейну притягіння, виходимо на  $\tilde{x}^*$  (як завгодно близьку до  $x^*$ ) та приймаємо  $X_0 = \{\tilde{x}^*\}$ . Фактичні обчислювальні витрати тут будуть залежати лише від швидкості збіжності композиції  $f_i(\cdot)$  та наперед заданої точності. Якщо ж це був не перший запуск траєкторії, то в якості  $X_0$  обираємо усталений стан попереднього запуску траєкторії (для сусідньої точки  $\bar{\lambda}$ , для якої був знайдений цикл). При побудові таких карт заздалегідь обмежуємося максимальною довжиною циклу  $p$ .

Розглянемо можливі процедури визначення періоду траєкторії та їх обчислювальні складності. Кожну з таких процедур можна розбити на дві складові. Перша полягає в побудові станів ДС в моменти часу  $i, i+1, \dots, j$ . Друга ж – у порівнянні новозбудованих станів між собою та із раніше отриманими в метриці  $d_H(\cdot, \cdot)$ . Обчислювальна оптимізація процедури пошуку періоду якраз полягає у комбінуванні цих складових таким чином, аби загальна складність була найменшою.

**Процедура А.** Суть її полягає в тому, що на кожному кроці побудови траєкторії ми намагаємося знайти цикл, порівнюючи останній отриманий стан ДС із попередніми у зворотному часі, аби спершу відшукати «мінімальний» цикл (без подвоєнь, потроєнь тощо). Показано, що часова складність процедури  $\in O(c_n N^{2i+2p} + N^{2i+2p-1})$  при ітеруванні із стану  $i$  в стан  $i+p$ , що замикатиме знайдений цикл довжини  $p$

$$M(i, i + p) + \sum_{k=i}^{i+p-1} \sum_{j=k+1}^{i+p} d_{kj} \quad (15)$$

**Теорема.** Просторові обчислювальні витрати процедури  $A$  становлять  $O(N^{i+j})$ .

**Процедура В.** З виразу (15) неважко показати, що у випадку, коли в якості станів ДС вибрані мультимножини, складова з обчислення метрик  $d_H(\cdot, \cdot)$  в процедурі перебирає на себе більшу частину обчислювальних ресурсів (порівняно із затратами на побудову самих станів). В такому випадку, для оцінки  $M(i, i + p)$  в (15) матиме місце (14), а другий доданок залишиться незмінним. Тому, наступна альтернативна процедура покликана мінімізувати обчислення саме цього доданку. Покладемо – початковий стан ДС  $X_{i-1}$  належить басейну притягіння циклу. Починаємо будувати траєкторію з першої серії ( $s = 0$ ) ітерацій  $X_i, X_{i+1}, X_{i+2}, \dots, X_{i+p-1}$  довжиною  $p$ . Відстань між такими серіями  $t \geq 1$  визначається емпірично та залежить від особливостей динаміки системи (обернено пропорційно швидкості наближення до граничної множини). Таке розбиття процесу ітерування на стани в серіях та поза ними обумовлене тим, що операції порівняння станів будуть застосовуватись лише до тих з них, котрі у серіях. У такий спосіб скорочуючи обчислювальні витрати (рис. 1).

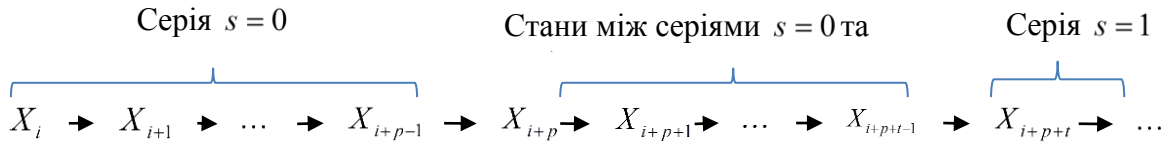


Рисунок 1. Структура траєкторії згідно процедури В.

Відхилення між станами поточної серії та  $X_{i+p}$ :  $\bar{d}^{(s)} = (d_1^{(s)}, d_2^{(s)}, \dots, d_p^{(s)})$ , де  $d_j^{(s)} = d_H(X_{i+p+s(p+t)}, X_{i+p+s(p+t)-j})$  згідно ілюстрації на рис. 2.

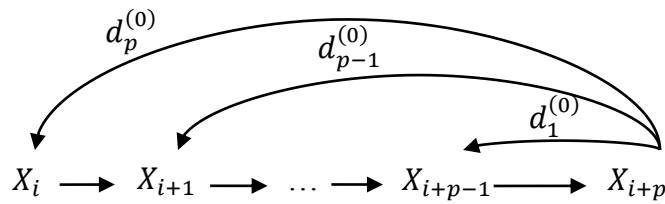


Рисунок 2. Порівняння станів серії  $s = 0$  із станом поза нею.

У випадку, коли знайдено таке  $d_k^{(s)} \leq \varepsilon$ , то процедуру пошуку циклу завершено й вважаємо, що ДС для поточного параметру  $\bar{\lambda}$  має період  $k$ . Якщо таких

$$d_{k_1}^{(s)}, d_{k_2}^{(s)}, \dots \leq \varepsilon \quad (16)$$

кілька, то обираємо той, який має найменший індекс  $\min_i(k_i)$ , аби заздалегідь уникнути кратних циклів та сфокусуватися на «мінімальному». Й нарешті, третій варіант – таке  $d_k^{(s)} \leq \varepsilon$  не знайдено, то здійснюємо наступну

серію ітерацій. Такі серії ітерувань  $s = 0, 1, \dots$  проводимо до тих пір, поки  $m^{(s)} = \min(d_1^{(s)}, d_2^{(s)}, \dots, d_p^{(s)})$  спадає і перевищує  $\varepsilon$ . Якщо стоїть задача – переконатися, що ми наблизились до орбіти періоду саме  $k_1$ , то розглядаємо  $m^{(s)} = d_{k_1}^{(s)} \leq \varepsilon$ . В такому випадку необхідно проводити оцінку компонентів вектора  $\bar{\Delta}_{k_1}^{(s+1)} = (d_1^{(s+1)}, d_2^{(s+1)}, \dots, d_{k_1}^{(s+1)}) - (d_1^{(s)}, d_2^{(s)}, \dots, d_{k_1}^{(s)})$ . Тепер ми здійснюватимемо серії ітерувань довжиною  $k_1$ . У випадку  $k_1$ -періодичної орбіти необхідно, аби виконувалася умова  $\bar{\Delta}_{k_1}^{(s+1)} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \bar{0}$ . При порушенні цієї умови слід обрати наступного кандидата  $k_2 \neq k_1$  із (16), відмінного від попередньо розглянутих із набору  $\min(d_1^{(s+1)}, d_2^{(s+1)}, \dots, d_p^{(s+1)}) \leq \varepsilon$ . Якщо таких не залишилося, то ми маємо справу або із орбітою періоду більшого за розглянуте  $p$ , або ми потрапили в область квазіперіодичності чи хаосу.

З метою мінімізації кількості побудов станів системи, довжина цих ланцюгів буде залежати від номеру серії  $t = t(s)$ . Довжину ланцюга станів визначатимемо на основі швидкості спадання  $\bar{\Delta}_k^{(s)}$ :  $t(s+1) \sim \left\lfloor 1 / \left\| \bar{\Delta}_k^{(s+1)} - \bar{\Delta}_k^{(s)} \right\| \right\rfloor$ .

**Теорема.** *Просторові обчислювальні витрати процедури  $B$  становлять  $O(N^{i+j})$ .*

Наприкінці розділу здійснюється порівняння запропонованих процедур з точки зору обчислювальних витрат та рекомендації щодо доцільності використання кожної з них в окремих випадках.

**Підрозділ 3.5** присвячено обґрунтуванню використання та проблематиці розрахунку старшого показника Ляпунова (СПЛ) наряду із побудовою карт динамічних режимів з метою точнішого визначення характеру динаміки при заданих управляючих параметрах. В основу узагальнення методу побудови карти СПЛ для ДСА покладено адаптоване означення:

**Означення.** *При початковому збуренні  $\|\tilde{x}_0\|$  траєкторії у Хаусдорфовому метричному просторі показник  $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\|\tilde{x}_0\| \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \frac{d_H(X_n, X'_n)}{\|\tilde{x}_0\|}$  називатимемо показником Ляпунова для ДСА. Тут  $d_H(X_n, X'_n)$  – відхилення між основною та збуреною траєкторіями в момент часу  $n$ .*

При його розрахунку опираємося на існуючий алгоритм Бенеттіна  $\lambda = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^T \ln \frac{d_H(X_n, X'_n)}{\|\tilde{x}_0\|}$  по метриці Хаусдорфа для достатньо великого  $T$ .

**Теорема.** *Просторові та часові обчислювальні витрати процедури розрахунку СПЛ становлять  $O(N^i)$  та  $O(N^{2i})$  від номеру ітерації відповідно.*

**Четвертий розділ** присвячено проблемам розробки програмних засобів аналізу та моделювання СА на базі багатопоточної кластерної обчислювальної архітектури та відповідним чисельним експериментам. Представлено архітектуру системи для побудови карт абстрактних показників ДСА. На її основі та згідно алгоритмів описаних у попередньому

розділі будуються карти: динамічних режимів, старшого показника Ляпунова та фрактальних й інформаційних розмірностей станів СА.

Вирішення нашої задачі побудови програмних засобів передбачає реалізацію принципу скритого паралелізму, тобто абстрагування від архітектури системи (зокрема багатопоточності) і включає: розпаралелювання обчислювальних алгоритмів, синхронізацію обміну даних між обчислювальними вузлами, візуалізацію вихідної інформації у зручному для користувача форматі. На рис. 3 запропоновано схему побудови карти заданого набору показників ДСА. Вона дає можливість абстрагуватися від конкретного виду карти показників.

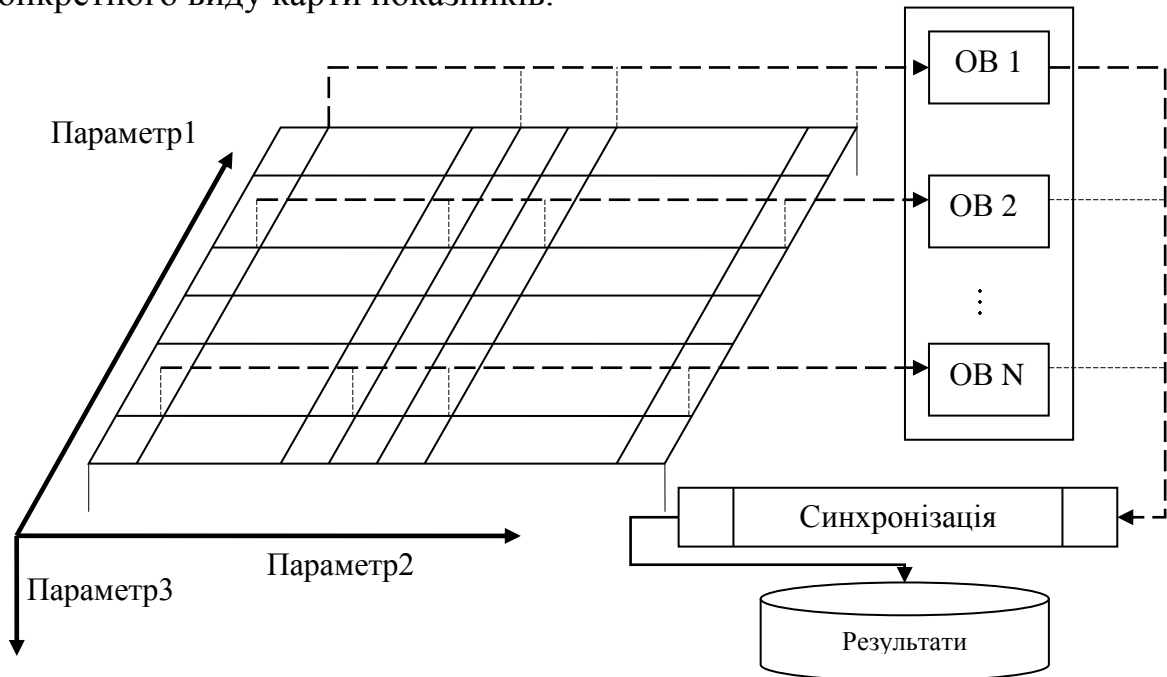


Рисунок 3. Узагальнена схема побудови карти показників. Позначено: «ОВ» – обчислювальний вузол; «Параметр» – параметр ДС.

Прикладами карт, побудованих на запропонованій архітектурі є карти динамічних режимів (рис.4) та старшого ПЛ (рис.5). Для них було обрано рівняння, що визначає ДС із сильною антисипацією першого порядку:

$$x_{n+1} = \lambda \cdot x_n \cdot (1 - x_n) - \alpha \cdot x_{n+1}^2 \quad (17)$$

Воно було обрано, оскільки при  $\alpha = 0$  перетворюється на логістичне відображення, котрому властива багата динаміка – із сценарієм Фейгембаума переходу до хаосу через подвоєння періодів, а антисипативна складова при  $\alpha$  – нелінійна.

Кольорами на рис.4 позначено області із періодичною динамікою: синім – із періодом 1, червоним – 2 тощо. Білий колір відповідає областям, де період не знайдено (відсутні дійсні стани, динаміка: квазіперіодична, хаотична тощо). На рис.5 відтінками сірого кольору представлено області стійкої поведінки (старший ПЛ – від’ємний), причому, тим менший показник, чим темніший колір. Відповідно відтінками червоного кольору зображено області нестійкої поведінки із аналогічною градацією. Білі області



– із нульовим значенням старшого ПЛ (або, якщо дійсна траєкторія ДС переривається).

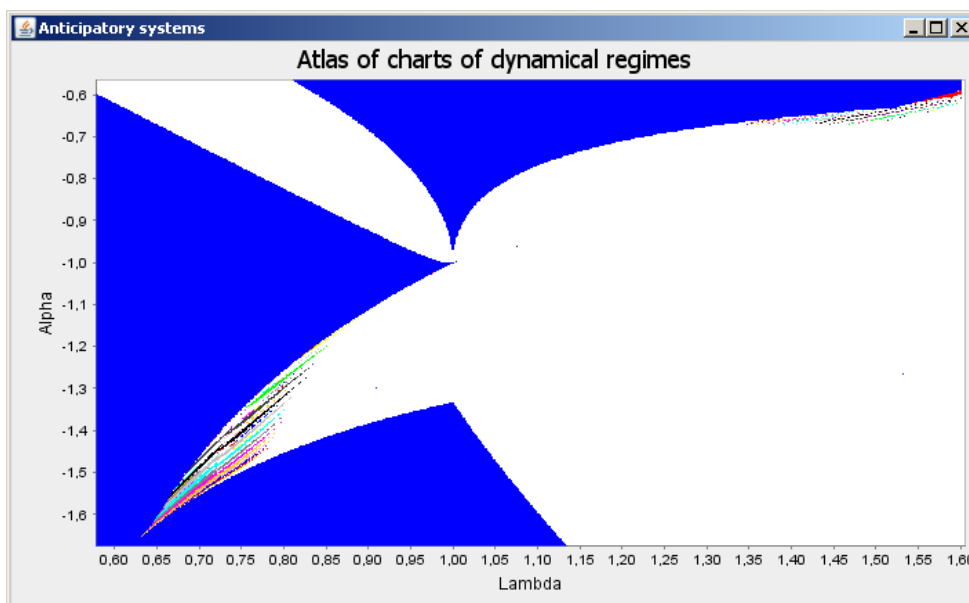


Рисунок 4. Карта динамічних режимів ДСА у просторі параметрів  $(\lambda; \alpha)$ .

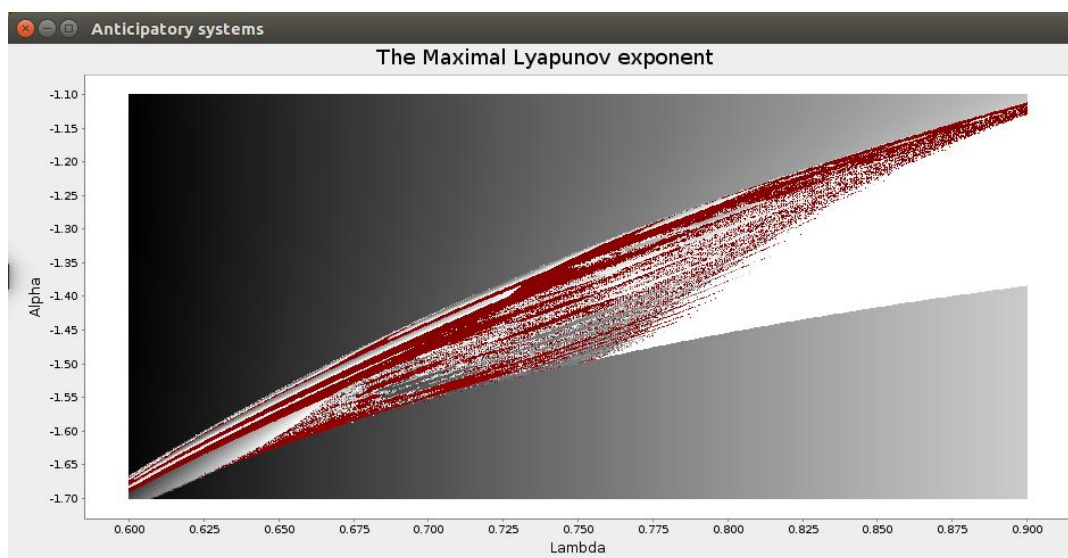


Рисунок 5. Карта старшого ПЛ у просторі параметрів  $(\lambda; \alpha)$ .

Одночасне поєднання вищевказаних карт значно допомагає в інтерпретації отриманих результатів дослідження ДСА. Наприкінці розділу наведені чисельні результати переходу між різними режимами ДСА на основі перетинів карти старшого ПЛ лініями  $\alpha = \text{const}$ .

## ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі вирішено проблему розвинення методів аналізу нелінійних дискретних систем із антисипацією наряду із скороченням їх часових обчислювальних витрат.

Основні наукові результати полягають в наступному:

- Досліджено простір параметрів нелінійної дискретної антисипаційної системи. Встановлено області періодичної поведінки відповідної

динамічної системи із запізненням з оператором еволюції, заданим багатозначним оператором. Результати представлені у вигляді карт динамічних режимів узагальнених на системи такого типу.

- В ході дослідження граничних множин систем такого типу, сформульовано та доведено достатню умову виникнення самоподібних структур в цих множинах для випадку, коли антисипаційна система зводиться до динамічної системи із оператором Хатчинсона з двома селекторами. Використовуючи апарат символічної динаміки, отримані співвідношення для оцінок розмірності Хаусдорфа зверху граничних множин таких систем для випадків, коли нелінійні селектори оператора Хатчинсона відповідної динамічної системи не перетинаються та із самоперетинами частинного випадку. Для відповідного співвідношення частинного випадку із самоперетинами селекторів показано єдиність розв'язку та отримано необхідну умову його існування.
- Для нелінійних дискретних антисипаційних систем, зведених до динамічних систем із оператором Хатчинсона, представлено та доведено обчислювальні складності: побудови станів; траєкторій; відстані між станами для пошуку періодів циклічних траєкторій. Зменшено обчислювальні витрати в ході моделювання таких систем за рахунок представлення їх станів мультимножинами.
- Узагальнено методи побудови карт динамічних режимів та старшого показника Ляпунова на системи із сильною антисипацією у Хаусдорфовому метричному просторі.
- На основі узагальнених методів було побудовано відповідні карти за допомогою розробленого багатопоточного програмного забезпечення на кластерній обчислювальній архітектурі СКІТ. При цьому використовувалась система із сильною антисипацією першого порядку.

Всі обчислювальні експерименти проводилися на розподілених кластерних ресурсах інституту кібернетики ім. Глушкова та Національного технічного університету України «КПІ ім. Ігоря Сікорського».

Результати досліджень можуть бути застосовані при системному аналізі моделей процесів та явищ, котрі передбачають наявність випереджаючої складової. Моделювання таких об'єктів потребує значних обчислювальних витрат. Тому, узагальнені методи та розроблені засоби значно спростять подальший аналіз таких систем.

## **СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ**

1. Lazarenko, S.V., Makarenko, A.S.: Computational Complexities of Modeling of Dynamical Systems with Anticipation. *Journal of Automation and Information Sciences*. **51**(4), 55–65 (2019). doi: 10.1615/JAutomatInfScien.v51.i4.50. (Іноземне видання, реферується в SCOPUS). *Особистий внесок: всі основні результати; співавтору – постановка задачі.*

2. Лазаренко, С. В.: До питання обчислювальної складності при дослідженні динаміки систем із антисипацією. *Математичні машини і системи*. **1**, 28–35 (2019). (Фахове видання, включено до бази РІНЦ eLIBRARY.ru)
3. Лазаренко, С.В., Макаренко, О.С.: Аналіз логістичного антисипаційного рівняння із сильною антисипацією. *Наукові вісті НТУУ «КПІ»*. **4**, 91–96 (2012). (Фахове видання). *Особистий внесок: всі основні результати; співавтору – постановка задачі.*
4. Лазаренко, С.В., Макаренко, О.С.: Класифікація операторів однієї дискретної антисипаційної системи першого порядку. *Системні дослідження та інформаційні технології*. **1**, 97–106 (2013). (Фахове видання). *Особистий внесок: всі основні результати; співавтору – постановка задачі.*
5. Лазаренко, С.В., Макаренко, О.С.: Багатопоточні комп'ютерні обчислення у дослідженні нелінійних динамічних систем. *Проблеми програмування*. **3**, 109–116 (2013). (Фахове видання). *Особистий внесок: всі основні результати; співавтору – постановка задачі.*
6. Лазаренко, С.В., Макаренко, О.С.: Про оцінки розмірностей атракторів дискретних динамічних систем із антисипацією. *Математичні машини і системи*. **4**, 161–168 (2013). (Фахове видання). *Особистий внесок: всі основні результати; співавтору – постановка задачі.*
7. Lazarenko, S., Makarenko, A.: Investigation of Complex Multivalued Solutions in Discrete Dynamical Systems with Anticipation. International Conference on Computing Anticipatory Systems: CASYS'11, August 8–13 2011.
8. Makarenko, A., Lazarenko, S.: About a few weak anticipatory systems. The 12<sup>th</sup> Conference Mathematics in Technical and Natural Sciences. Krynica, September 4–10 2011
9. Lazarenko, S.: Cluster computing for some nonlinear multiple-value mapping. 2<sup>nd</sup> International conference on Nonlinear analysis and applications / on memory of V.S. Melnik, April 4–6 2012, p. 62.
10. Лазаренко, С.В.: Моделювання сильних антисипаційних систем за допомогою кластерних обчислень. Міжнародна конференція «Динамічні системи та їх застосування». 16–18 травня 2012. с.20.
11. Лазаренко, С.В., Макаренко, О.С.: Математическое моделирование систем с сильной антисипацией. Международная научно-методическая конференция «Информационно-вычислительные технологии и моделирование в решении задач строительства, техники, управления и образования», ПГУАС. Пенза. 9–14 декабря 2013
12. Лазаренко, С. В., Макаренко, О.С.: Особливості математичного моделювання систем із антисипацією та проблеми, що постають в ході нього. Аналіз, моделювання, управління. Вип. 1. Збірник наукових праць відділу прикладного системного аналізу НТУУ «КПІ». Київ, 2013. с. 177.
13. Лазаренко, С.В.: До обчислювальних проблем антисипаційних систем. Сьома міжнародна науково-практична конференція «Математика в сучасному технічному університеті». Київ, 27–28 грудня 2018.

## АНОТАЦІЯ

**Лазаренко С.В. Методи аналізу нелінійних дискретних систем із антисипацією.** – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.04 – системний аналіз і теорія оптимальних рішень. – Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», МОН України, Київ, 2019.

Дисертація присвячена розвиненню математичних та розробці програмних засобів аналізу дискретних нелінійних систем із антисипацією. Досліджено простір параметрів дискретної нелінійної системи із сильною антисипацією першого порядку. Досліджено їх граничні множини на предмет фрактальних властивостей. Апаратом символічної динаміки отримані співвідношення для оцінки розмірності Хаусдорфа зверху граничних множин динамічних систем із багатозначним оператором еволюції у яких нелінійні селектори не перетинаються, та для частинного випадку із самоперетинами. Доведено єдиність та необхідну умову існування розв'язку відповідного співвідношення для випадку із самоперетинами. Узагальнено методи побудови карт динамічних режимів та старшого показника Ляпунова на системи із багатозначними операторами еволюції із скороченням часових обчислювальних складностей. Отримані та доведені просторово-часові обчислювальні складності їх моделювання, запропоновано й обґрунтовано представлення їх станів мультимножинами для мінімізації цих обчислювальних витрат.

**Ключові слова:** системи із випередженням, динамічна система, фрактальна розмірність, показники Ляпунова, оператор Хатчинсона, багатозначні оператори, символічна динаміка, обчислювальна складність.

## АННОТАЦИЯ

**Лазаренко С.В. Методы анализа нелинейных дискретных систем с антисипацией.** – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.04 – системный анализ и теория оптимальных решений. – Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского», МОН Украины, Киев, 2019.

Диссертация посвящена обобщению математических и разработке программных средств анализа дискретных нелинейных систем с антисипацией. Исследовано пространство параметров дискретной нелинейной системы с сильной антисипацией первого порядка. Исследованы их предельные множества на предмет фрактальных свойств. Аппаратом символьной динамики получены соотношения для оценки размерности Хаусдорфа сверху предельных множеств динамических систем с многозначительным оператором эволюции, в которых нелинейные селекторы

не пересекаются, и для частного случая с самопересечениями. Доказано единственность и необходимое условие существования решения соответствующего соотношения для случая с самопересечением. Обобщены методы построения карт динамических режимов и старшего показателя Ляпунова на системы с многозначными операторами эволюции с сокращением временных вычислительных сложностей. Получены и доказаны пространственно-временные вычислительные сложности их моделирования, предложено и обосновано представление их состояний мультимножествами для минимизации этих вычислительных затрат.

**Ключевые слова:** системы с опережением, динамическая система, фрактальная размерность, показатели Ляпунова, оператор Хатчинсона, многозначные операторы, символьная динамика, вычислительная сложность.

### ABSTRACT

**Lazarenko S.V. Methods of analyzing of nonlinear discrete anticipatory systems.** – Manuscript.

The thesis for the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences on the specialty 01.05.04 – Systems Analysis and Theory of Optimal Solutions. – National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, Ministry of Education and Science of Ukraine Kiev, 2019.

The thesis is devoted to the generalization of mathematical and the development of software tools for analysis of discrete nonlinear systems with anticipations (AS).

The reduction of these systems is presented by delayed systems with multivalued evolution operators. In the example of the logistic equation, a new model with anticipation with the addition of a quadratic anticipatory component is presented and a general analysis is carried out in the parameter space. The region of periodic behavior of the corresponding dynamic system with delay with the evolution operator given by a multivalued operator is established. The results are presented in the form of the atlases of charts of dynamical regimes of generalized systems of this type. A sufficient condition for the appearance of self-similar structures in these sets is formulated and proved for the case when the AS is reduced to a dynamical system with a Hutchinson operator with two selectors.

As a result of the study of fractal properties of attractors of nonlinear discrete AS, using the tools of the theory of symbolic dynamics and iterated function systems (IFS), it was got the equations with the top estimation of Hausdorff dimensions when the nonlinear selectors of the Hutchinson operator of the corresponding dynamic system do not intersect and for the case with particular the self-intersections. The considered partial case of self-inverting selectors does not belong to a class of so-called IFS with finite-type intersections. The uniqueness of the solution and the necessary condition for its existence of the corresponding equation with self-intersections are provided.

The generalization of the following methods to the systems with a strong anticipation in the Hausdorff metric space is described in detail: the construction of the Atlases of dynamical regimens and the Maps of The Maximal Lyapunov

Exponent. The generalization of these methods is accompanied by a reduction of time complexity. The representation of the states of the AS by multi-sets is proposed and its expediency is proved in terms of minimization of time complexity. For nonlinear discrete AS, reduced to dynamical systems with the Hutchinson operator, the time and space computational complexities for followings are presented and proved: the construction of states; trajectory; distance between states for finding periods of cyclic trajectories; adapted procedures for finding periods of cyclic trajectories.

A comparison of the proposed procedures for the search for periods of cyclic trajectories from the point of view of computational complexity has been made and conclusions have been made as to the expediency of using one or another procedure in phase spaces of different structures (the distribution of periodic regimes regions). The first procedure is a generalization of the classical procedure in the Hausdorff space for finding the period of the cyclic procedure in the backward direction. Found the most time consuming parts of this procedure. In order to minimize them, the second procedure is carried out in series of iterations, which shortens the search time by an order of magnitude.

The architecture of the system for construction of abstract cards is presented based on the parallelization principle of computations on a multi-node architecture. On the basis of this scheme, it was implemented: the methods of constructing of the Atlases of dynamic regimens and the Maximal Lyapunov exponent; maps of fractal and informational dimensions of states of AS. The numerical results of the transition between different operating modes of the AS are given.

Based on the generalized methods, corresponding maps were constructed using the developed multithreaded software on the cluster computer architecture of SCIT. In this case, a nonlinear discrete system with a strong anticipation of the first order (with a quadratic anticipatory component) was used. The type of such a system is chosen for the following reasons. As is well known, the classical logistics equation has a rich dynamics due to the nonlinearity (the region of regular and chaotic dynamics) with well-studied transition scenarios between them. With the addition, respectively, of a nonlinear anticipatory component, it is relatively simple from a numerical point of view to conduct a study of the transition from the classical logistic equation to one that begins to take into account the component of the advance, thereby defining new models and the results of their research.

All computational experiments were conducted on distributed cluster resources of the Glushkov Institute of Cybernetics and the National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute".

The results of research can be applied to the construction of new models of processes that imply the existence of the advance component. Modeling of such objects requires significant computational costs. Therefore, the developed and proposed approaches will greatly simplify the analysis of such systems.

**Keywords:** time-advance systems, dynamic system, fractal dimension, Lyapunov exponents, Hutchinson operator, multi-valued maps, symbolic dynamics, computation complexity.